LA RECTA EN EL ESPACIO R^3

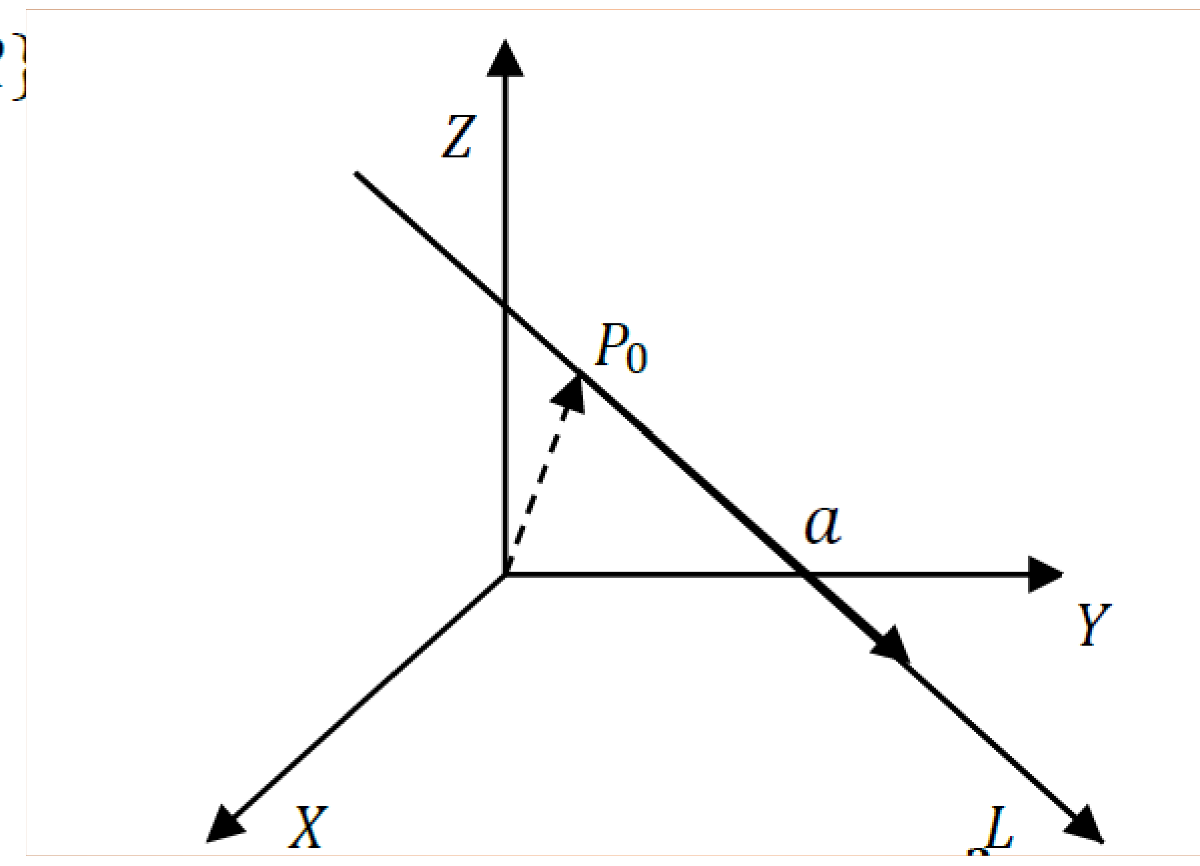
DEFINICIÓN. La recta L es el conjunto de puntos de R^3 definido por:

$$L = \{P \in R^3 / P = P_0 + t\bar{a}\ ; t \in R\}$$

Dónde

P_0 ; es un punto de paso de la recta L

$\bar{a}$; es un vector direccional de la recta L



DIVERSAS ECUACIONES DE LA RECTA

De la definición de la recta L se tiene

$$P \in L \Leftrightarrow P = P_0 + t\bar{a}, \qquad t \in R$$

Y la expresión

$$\boldsymbol{L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in R}$$

Es llamada **ecuación vectorial de la recta *L*.**

Sean $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces la recta L resulta

$$L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3), t \in R$$

De donde

$$\boldsymbol{L: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, \qquad t \in R}$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica de la recta L.**

Despejando el parámetro t e igualando se obtiene

$$\boldsymbol{L}: \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{a}_1}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{a}_2}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0}{\boldsymbol{a}_3}$$

Expresión llamada **ecuación simétrica de la recta L**.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean $L_1 : P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$ y $L_2 : P = Q_0 + s\bar{b}$, $s \in R$ dos rectas en R^3.

Se presentan las siguientes posiciones relativas:

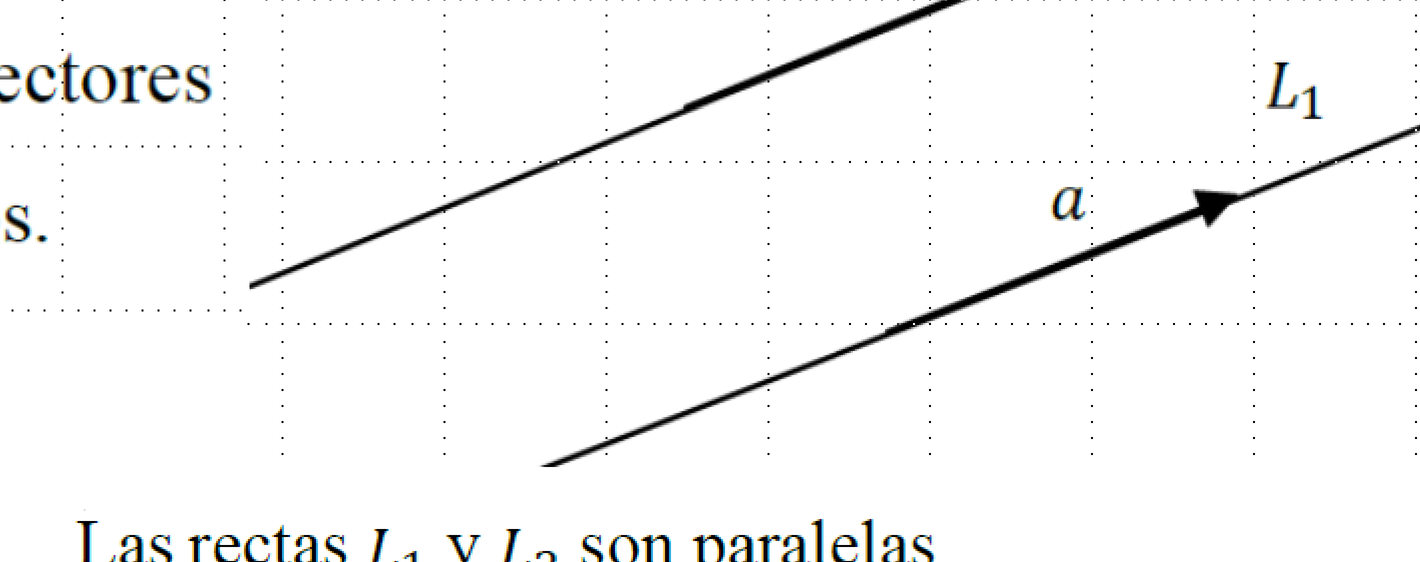
RECTAS PARALELAS

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas

(L_1 // y L_2) si y sólo si los vectores

direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos.

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \bar{a} // \bar{b}$$

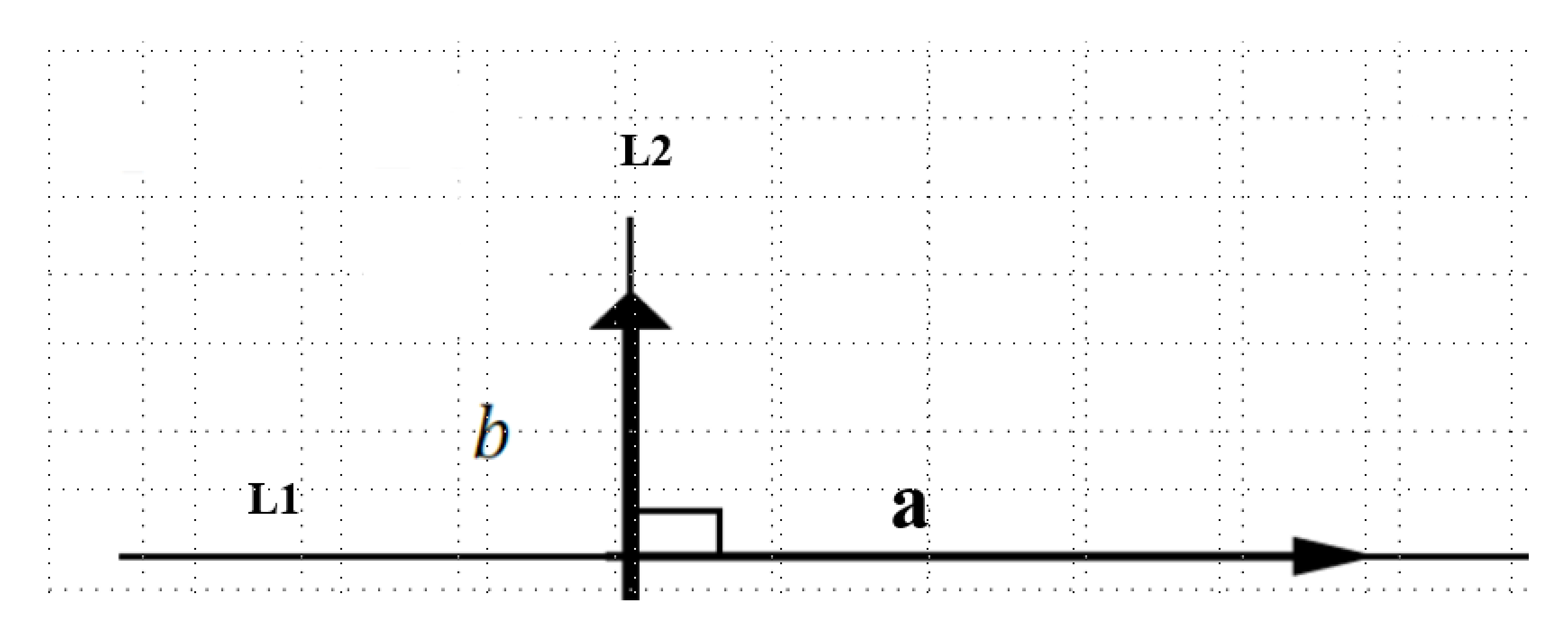


Las rectas L_1 y L_2 son paralelas

RECTAS ORTOGONALES

Las rectas L_1 y L_2 son ortogonales($L_1 \perp L_2$) si y sólo si los vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales.

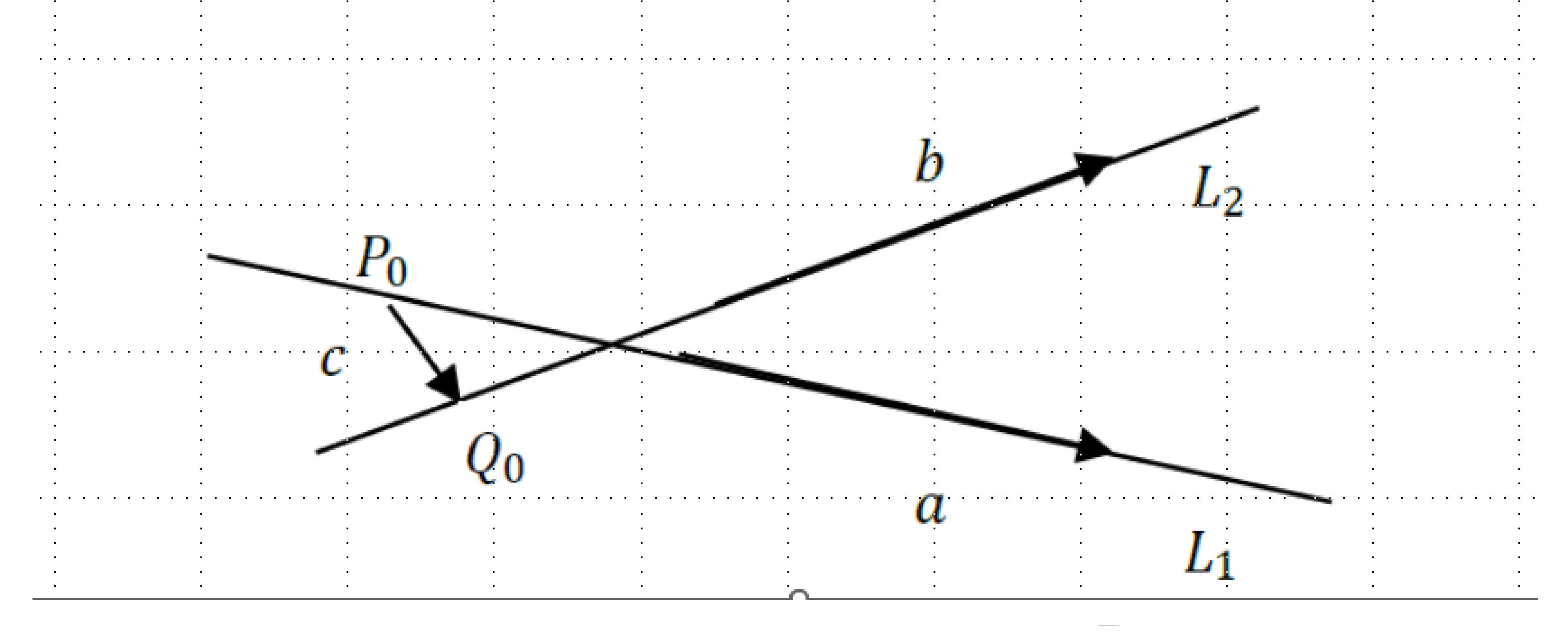
$$L_1 \perp L_2 \iff \bar{a} \perp \bar{b}$$



Las rectas L_1 y L_2 son ortogonales

RECTAS QUE SE INTERSECTAN

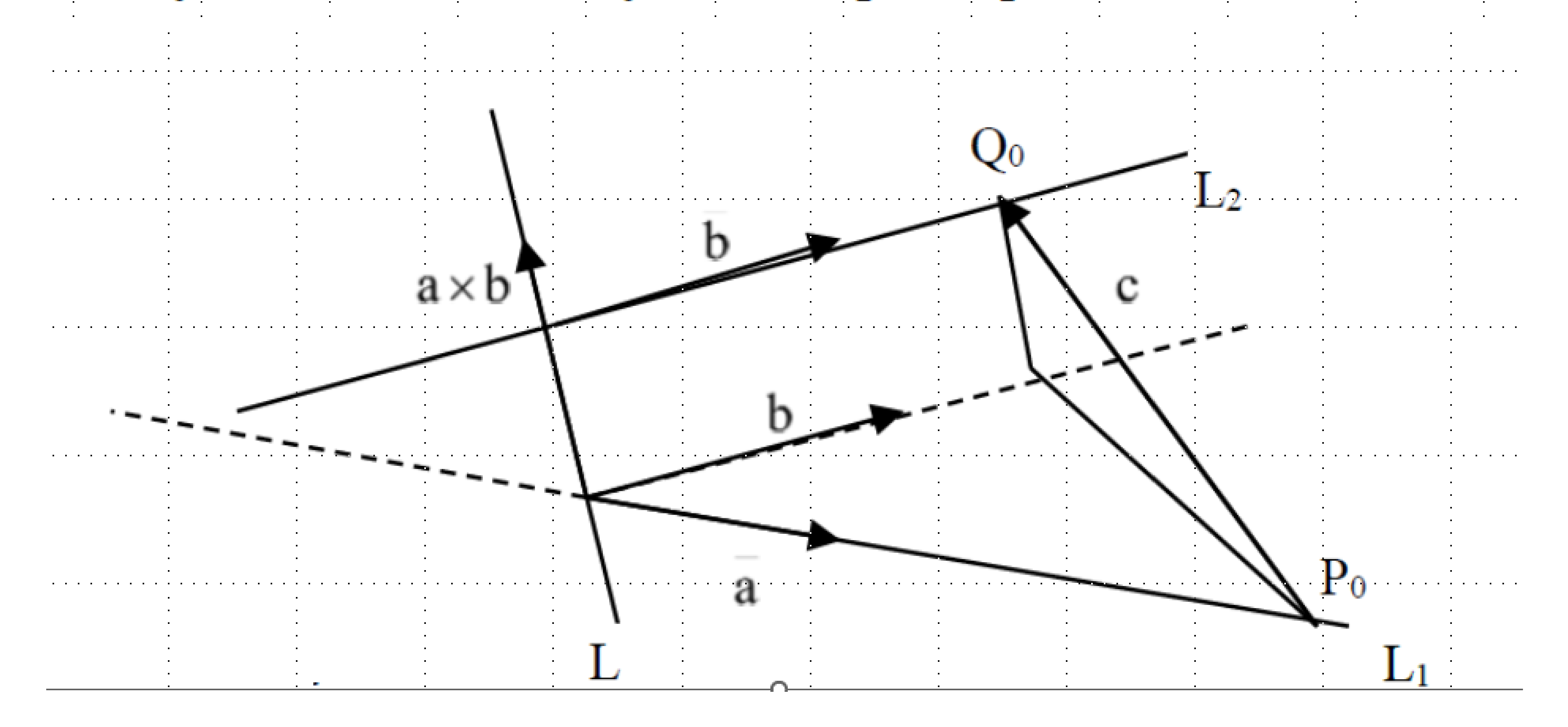
Las rectas L_1 y L_2 se interceptan si y sólo si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0}$



Las rectas L_1 y L_2 se intersectan

RECTAS QUE SE CRUZAN

Las rectas L_1 y L_2 se cruzan si y sólo si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0}$



Las rectas L_1 y L_2 se cruzan

ANGULO ENTRE RECTAS

Sean

$$L_1: P = P_0 + t\bar{a}\ , t \in R \text{ y } L_2: P = Q_0 + s\bar{b}\ , s \in R$$

Dos rectas en R^3. Se define el ángulo entre las rectas como aquel ángulo que forman sus vectores direccionales.

Es decir,

$$\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}) = \theta \text{ Y}$$

queda completamente determinado por:

$$cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$$

ANGULO ENTRE RECTAS

Sean

$$L_1: P = P_0 + t\bar{a}\ , t \in R \text{ y } L_2: P = Q_0 + s\bar{b}\ , s \in R$$

Dos rectas en R^3. Se define el ángulo entre las rectas como aquel ángulo que forman sus vectores direccionales.

Es decir,

$$\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}) = \theta \text{ Y}$$

queda completamente determinado por:

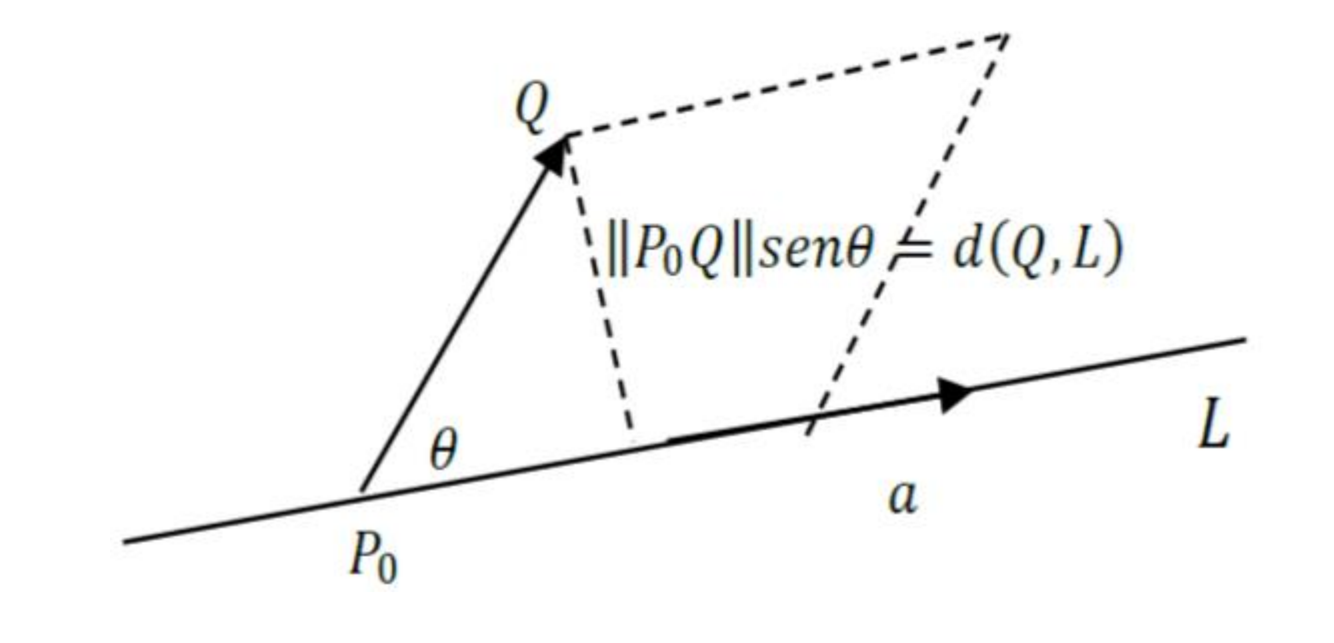
$$cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea L: $P = P_0 + t\bar{a}\,,\, t \in R$ una recta y Q un punto en R^3, para determinar la distancia del punto Q a L se sigue;

En la figura, el área del paralelogramo está dado por

$$A = \|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\| = \|\bar{a}\|\|\overline{P_0Q}\| sen\theta$$



De donde:

$$\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\| = \|\bar{a}\|(Q, L)$$

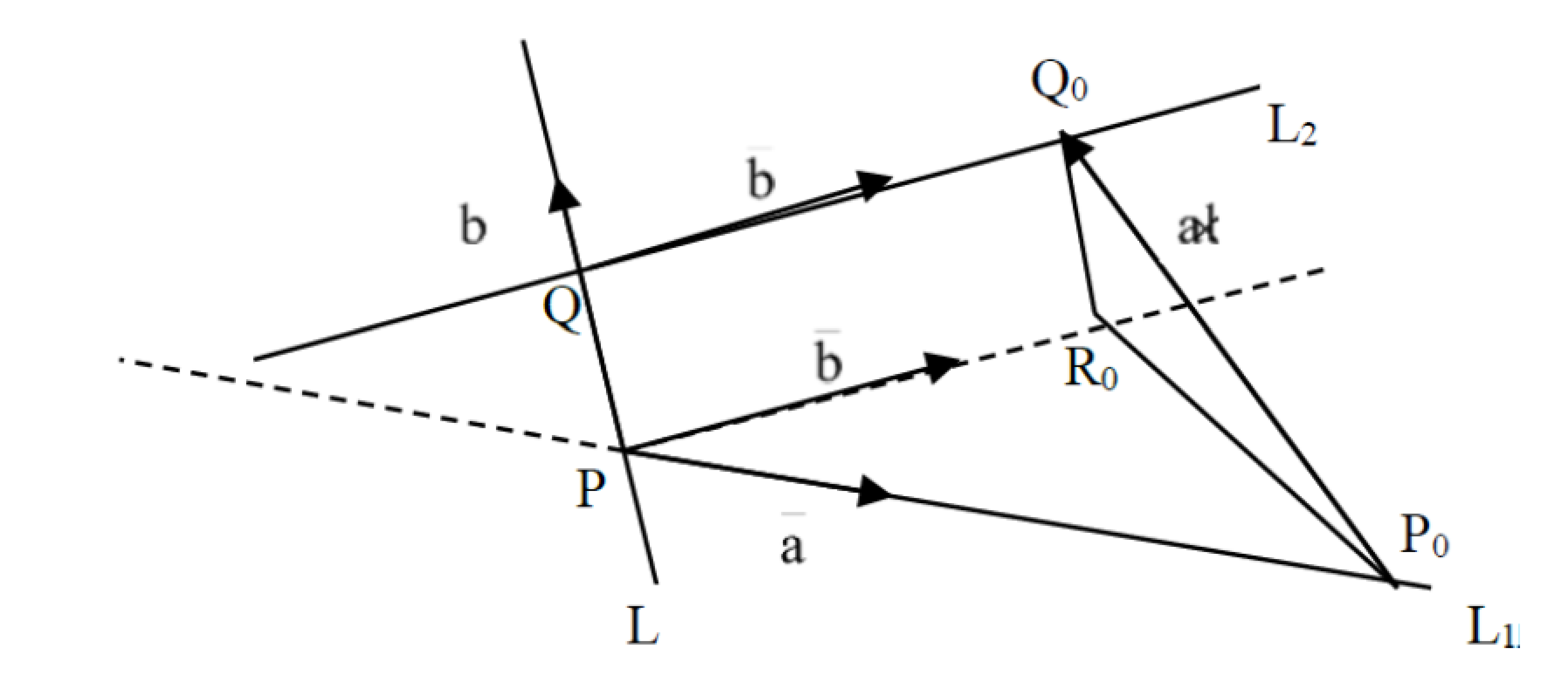
Finalmente;

$$\boldsymbol{d(Q,L)} = \frac{\|\overline{\boldsymbol{P_0Q}} \times \bar{\boldsymbol{a}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{a}}\|}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Sean $L_1: P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + s\bar{b}, s \in R$ dos rectas que se cruzan.

$(L_1, L_2) = \|\overrightarrow{PQ}\|$



Distancia entre las rectas que se cruzan L_1 y L_2

La distancia entre las rectas que se cruzan L_1 y L_2 es aquella medida a lo largo de la recta L ortogonal a ellas

Es decir,

$$\|\overline{PQ}\| = \|\overline{R_0Q_0}\| = |Comp_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q_0}| = \left|\frac{\overline{P_0Q_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}\right| = \frac{|[\overline{P_0Q_0}\ \bar{a}\ \bar{b}]|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{L_1},\boldsymbol{L_2}) = \frac{|[\overline{\boldsymbol{P_0Q_0}}\ \bar{\boldsymbol{a}}\ \bar{\boldsymbol{b}}]|}{\|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}\|}$$

La distancia entre las rectas que se cruzan L_1 y L_2 es aquella medida a lo largo de la recta L ortogonal a ellas

Es decir,

$$\|\overline{PQ}\| = \|\overline{R_0Q_0}\| = |Comp_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q_0}| = \left|\frac{\overline{P_0Q_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}\right| = \frac{|[\overline{P_0Q_0}\ \bar{a}\ \bar{b}]|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{d(L_1, L_2) = \frac{|[\overline{P_0Q_0}\ \bar{a}\ \bar{b}]|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}}$$

EL PLANO EN EL ESPACIO R^3

DEFINICIÓN. El Plano es un conjunto de puntos P en R^3 que tiene un punto de paso P_0 y dos vectores $\bar{a}$, b no paralelos en R^3 tal que

$$\boldsymbol{P} = \{P \in R^3 / P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b}; r, s \in R\}$$

DIVERSAS ECUACIONES DEL PLANO

De la definición del plano $\boldsymbol{P}$

$$P \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\, r, s \in R$$

Luego, la expresión

$$\boldsymbol{P}\colon P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\, r, s \in R$$

Es llamada la **ecuación vectorial del plano P** que pasa por el punto P_0 y es generado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Sean (x, y, z), $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces la ecuación del plano resulta

$$P\colon (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3);\, r, s \in R$$

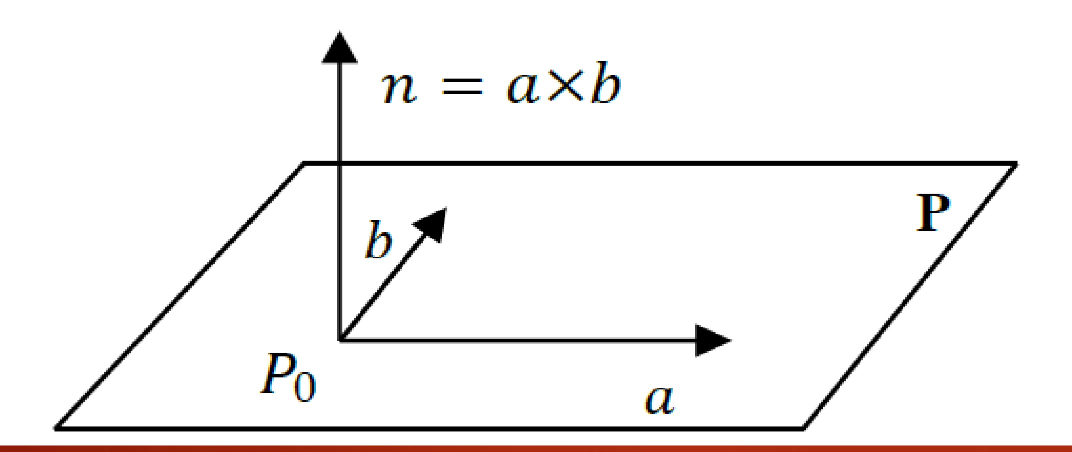
De donde

$$P:\begin{cases} x = x_0 + ra_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ra_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ra_3 + sb_3 \end{cases} ; r,s \in R$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica del plano** P.

VECTOR NORMAL AL PLANO

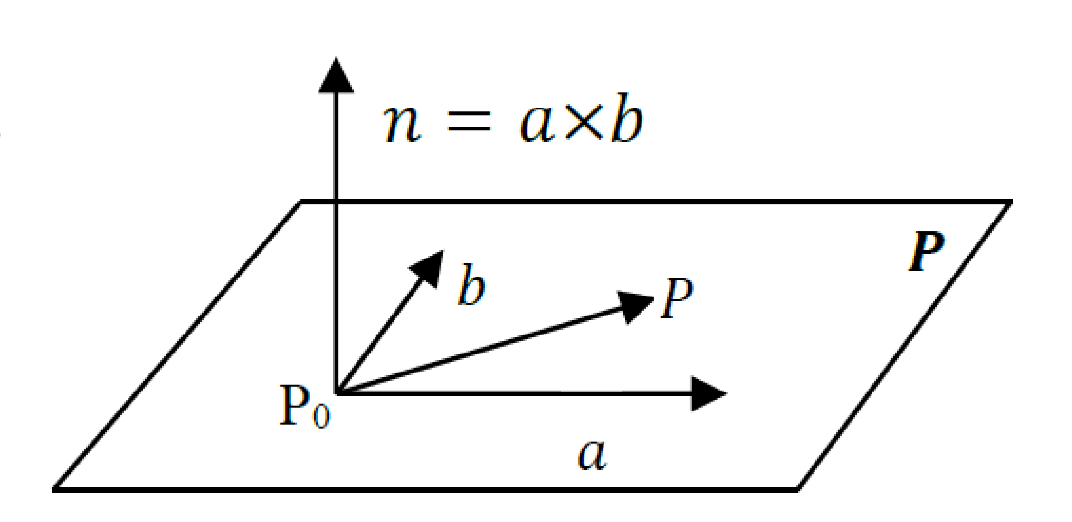
Cualquier vector no nulo $\bar{n}$ ortogonal al plano P, es ortogonal a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se llama **vector normal** al plano P.



En particular un vector normal al plano P es

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}$$

Si P_0 es un punto fijo del plano $\boldsymbol{P}$ y P es un punto cualquiera de $\boldsymbol{P}$, entonces el vector $\overline{P_0 P}$ es ortogonal al vector normal $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$



Luego la ecuación del plano está dada por

$$P : (\overline{P_0 P}) \cdot \bar{n} = 0$$

Figura 14: Ecuación normal del Plano P Expresión llamada **ecuación normal del plano P** con punto de paso P_0 y vector normal n _.

Ahora si (x, y, z), $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{n} = (a, b, c)$ se tiene que la ecuación del plano está dada por

$$P: (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

Operando se obtiene,

$$\boldsymbol{P: ax + by + cz + d = 0}$$

Donde: $\boldsymbol{= -ax_0 - by_0 - cz_0}$

Expresión llamada **ecuación general del plano P** con vector normal $\bar{n} = (a, b, c)$ y punto de paso P_0.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean los planos P_1: $(\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y P_2: $(\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ en R^3. Se presentan las siguientes posiciones relativas:

PLANOS PARALELOS

Los planos $P_1: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ son paralelos si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son paralelos.

Es decir,

$$P_1 // P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 // \bar{n}_2$$ **Notas.**

- Si P_1 y P_2 son paralelos entonces $P_1 = P_2$(coincidentes) o $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ (intersección nula)
- Si P_1 y P_2 no son paralelos entonces su intersección es una recta

PLANOS ORTOGONALES

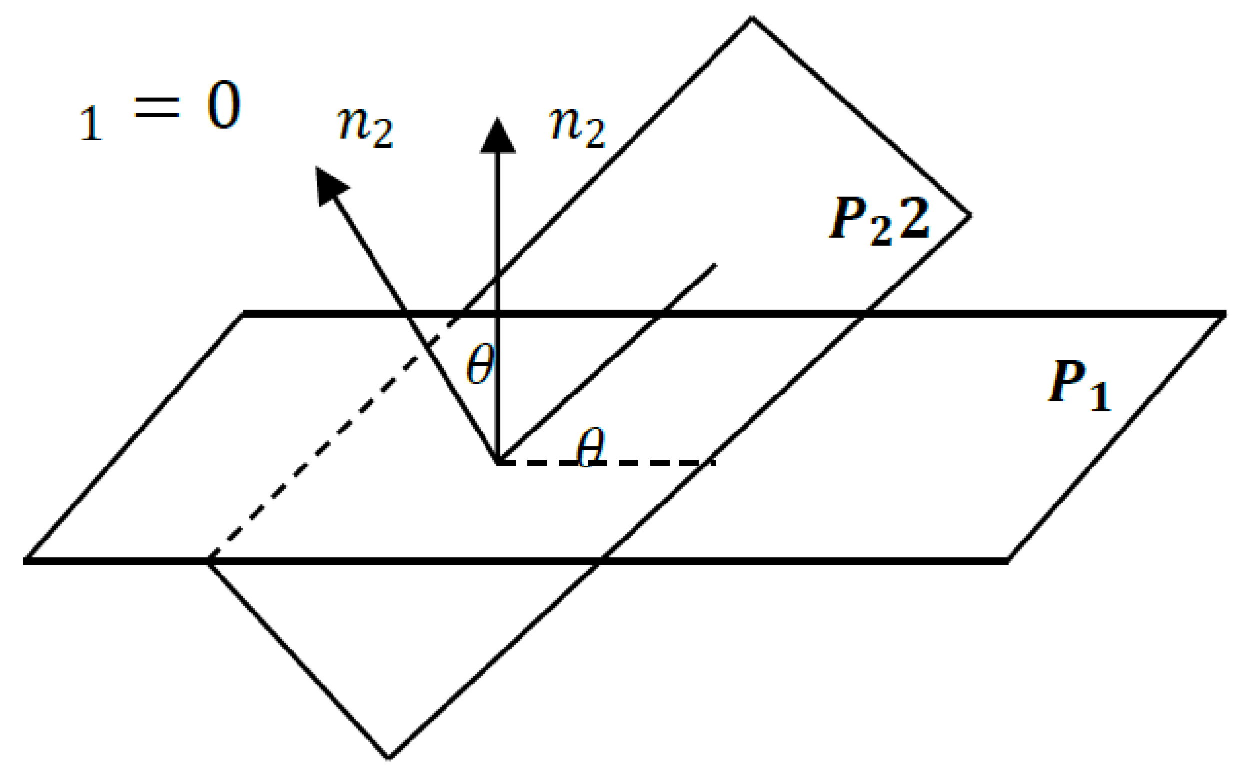
Los planos $P_1 : (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y $P_2 : (\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ son ortogonales si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son ortogonales.

Es decir,

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$$

ANGULO ENTRE DOS PLANOS

El ángulo entre los planos P_1: $(\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}$ y P_2: $(\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ se define como el ángulo formado entre sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$.



Angulo entre dos planos

Es decir,

$$\measuredangle(P_1, P_2) = \measuredangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \sim \cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\|\bar{n}_1\| \|\bar{n}_2\|}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

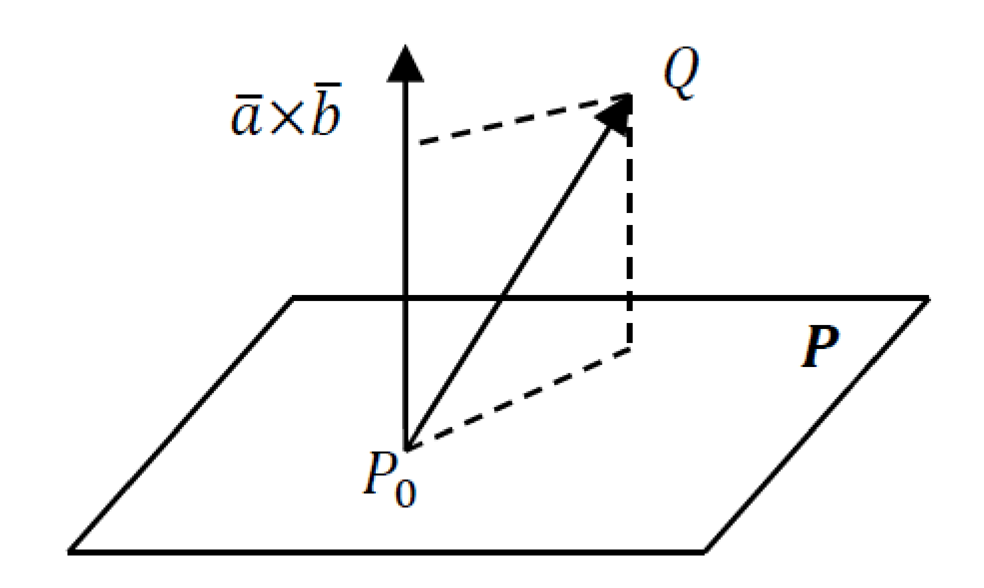
Sea el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$, $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ y el punto Q de R^3. Para hallar la distancia del punto Q al plano P se sigue;

En la figura

$$d(Q,P) = \|Proy_{\overline{\bar{a}\times\bar{b}}}\overline{P_0Q}\|$$

$$d(Q,P) = \left\|\frac{\overline{P_0Q} \cdot (\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2}\right\|$$

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q} \cdot (\bar{a}\times\bar{b})|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$



Distancia del punto Q al plano P

Pero teniendo en cuenta que también que :

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q} \cdot \bar{n}|}{\|\bar{n}\|}$$

Si $Q(x_1, y_1, z_1)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{n} = (a, b, c)$ y $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, entonces

$$d(Q,P) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boldsymbol{d(Q,P) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ en R^3. Se presenta las siguientes posiciones relativas:

RECTA PARALELA A UN PLANO

La recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ es paralela al plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ si y sólo su vector direccional $\bar{a}$ y su vector normal $\bar{n}$, respectivamente, son ortogonales. Es decir;

$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{n} \perp \bar{a} \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{a} = 0$$

y puede suceder que $L \cap P = L$ ó $L \cap P = \phi$

RECTA ORTOGONAL A UN PLANO

La recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ es ortogonal al plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ si y sólo su vector direccional $\bar{a}$ y su vector normal $\bar{n}$, respectivamente, son paralelos. Es decir;

$$L \perp P \Leftrightarrow \bar{n} \parallel \bar{a}$$

En general, la recta L que no es paralela al plano P se interceptan en un punto.

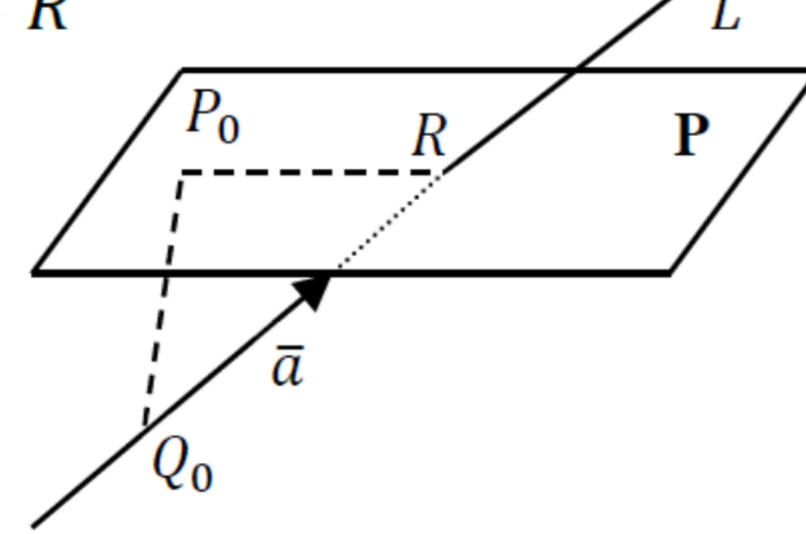
INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO NO PARALELOS

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ no paralelos.

Se desea hallar el punto de intersección $L \cap P = R$

Para ello se sigue;

En la figura



Intersección de la rectaL y el plano P

$$\overline{Q_0P_0} + \overline{P_0R} = \overline{Q_0R}$$

y

$$\overline{Q_0R} = t\bar{a}\,, t \in R$$

Aplicando multiplicación escalar en ambos

miembros de la ecuación anterior por el vector $\bar{n}$ resulta

$$\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} + \overline{P_0R} \cdot \bar{n} = \overline{Q_0R} \cdot \bar{n}$$

Pero $\bar{n} \perp \overline{P_0R}$, es decir $\bar{n} \cdot \overline{P_0R} = 0$,

Entonces

$$\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} = \overline{Q_0R} \cdot \bar{n} \leadsto \overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} = t\bar{a} \cdot \bar{n} \leadsto t = \frac{\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n}}{\bar{a} \cdot \bar{n}}$$

Luego la ecuación anterior resulta

$$\overline{Q_0R} = \left(\frac{\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n}}{\bar{a} \cdot \bar{n}} \right) \bar{a}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q_o} + \left[\frac{(\boldsymbol{P_0} - \boldsymbol{Q_0}) \cdot \bar{\boldsymbol{n}}}{\bar{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}} \right] \bar{\boldsymbol{a}}$$

Es el punto de intersección de la recta L y el plano P.

DISTANCIA ENTRE PLANOS PARALELOS

Sean los planos paralelos dados en su forma general por:

$$\wp_1: Ax + By + Cz = D_1$$

$$\wp_2: Ax + By + Cz = D_2$$

Para hallar la distancia entre estos planos se sigue;

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \wp_1$ y $_2(x_2, y_2, z_2) \in \wp_2$

Distancia entre dos planos paralelos

$$d(\wp_1, \wp_2) = |Comp_{\bar{n}} \overline{P_1 P_2}|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left| \frac{\overline{P_1 P_2} \cdot \bar{n}}{\|\bar{n}\|} \right|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left| \frac{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (A; B; C)}{\|(A, B, C)\|} \right|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left| \frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 - Ax_1 - By_1 - Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Finalmente,

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left| \frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Ejercicio . Halle la ecuación del plano P que contiene a la recta

$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Y es perpendicular al plano $P_1: 2x + y - 2z + 1 = 0$.

Solución

Se desea hallar la ecuación del plano P generado por el vector direccional de la recta L y por el vector normal del plano P_1, sino no son paralelos, y con punto de paso alguno punto de la recta L.

La recta L es intersección de dos planos con vectores normales

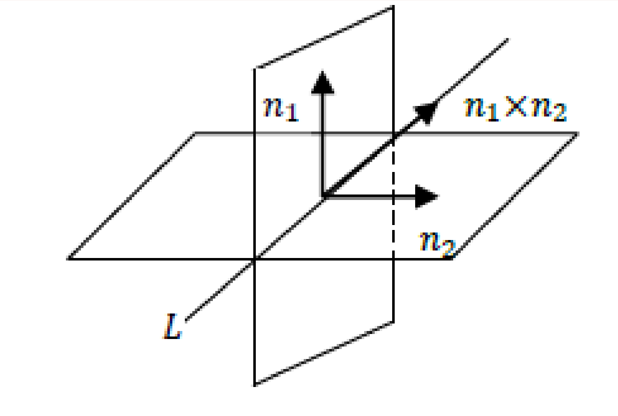
$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \ \sim \ \bar{n}_1 = (2,-1,-4) \\ 3x + 2y + z = 0 \ \sim \ \bar{n}_2 = (3,2,1) \end{cases}$$

Tales que $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, por lo que los planos son ortogonales.

En la figura, la recta L tiene como vector direccional al vector $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (7, -14, 7)$, por lo que

$$L: P = P_0 + (1, -2, 1) \, , t \in R$$

Donde $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$



Sea $x_0 = 0$, entonces

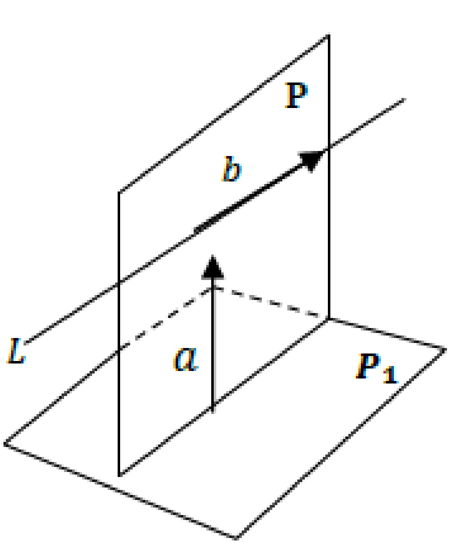
$$P_0(0, y_0, z_0) \in L: \begin{cases} y_0 - 4z_0 + 7 = 0 \\ 2y_0 + z_0 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $y_0 = -1$, $z_0 = 2$

Luego el punto de paso es $P_0(0, -1,2)$ y la recta es;

$$L: P = (0, -1,2) + (1, -2,1)\ , t \in R$$

Ahora el plano P es generado por el vector $\bar{a} = (2,1, -2)$ normal a P_1 y el vector $\bar{b} = (1, -2,1)$ vector direccional de L. Es decir



$$P: P = (0, -1,2) + r\bar{a} + s\bar{b}; r, s \in R$$

$$P{:}P{=}(0,-1,2){+}r(2,1,-2){+}s(1,-2,1);r,s{\in}R$$

De

$$P: \overline{P_0P} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$$

Se obtiene la ecuación general del plano P

$$P: (x, y + 1, z - 2) \cdot ((2,1,$$
$$-2)\times(1,-2,1)) = 0\ P: (x, y + 1, z - 2) \cdot$$
$$(-3,-4,-3) = 0$$

$$\boldsymbol{P: 3x + 4y + 3z - 2 = 0}$$



